发表在《力学与实践》87年第3期

$\frac{da}{dN}$有非常重要的影响，一般情况下加速裂纹扩展.

另外，应变速率、试件几何尺寸、加工和热处理、以及材料内部微观组织等诸多因素都对低周疲劳裂纹扩展有着重要的联系.

参 考 文 献

[1] 徐纪林，平面应力裂纹稳态扩展的弹塑性大变形有限元分析，力学学报，3(1982)，272.

[2] J. C. Newman, Jr, "A Finite-Element Analysis of Fatigue crack closure", Mechanics of Crack Growth, ASTM, STP. 590 (1974), 281.

[3] S. S. Manson, "Fatigue: A complex subject——some simple Approxi mations", *Exp. Mech.*, **5** (1965), 193.

[4] MaKoto Kikukama, et al., "Low cycle Fatigue under varying strain condition", *Bull. of the JSME*, **20**, 140 (1977), 145.

(本文于1986年1月6日收到)

对潘立宙《有助于极坐标系中求解平面弹性问题的一份特解表》一文的注记

沈 善 普

(美国威斯康星大学数学系)

摘要 本文给出一个把实应力函数表成 Goursat 形式的办法，从而使文献 [1] 的编表来得十分简单.

关键词 平面弹性问题，Airy 应力函数，微分法

文献 [1] 给出了有助于极坐标中求解平面弹性问题的一份特解表，但若编表时循原作者的方法，求位移时花在积分上的工作量甚大. 众所周知，如将实的 Airy 应力函数表示成 Goursat 的形式，所有的弹性力学量都可用微分法求出. 当然求微分要比求积分容易得多.

设 φ 为定义在弹性区域(连通开集) Ω 上的 Airy 应力函数，则有在 Ω 上的解析函数 $\chi(z)$ 及 $\psi(z)$ 存在，使

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}[\bar{z}\chi(z) + \psi(z)] \qquad (1)$$

$\chi(z)$ 可以原点为中心展为 Laurent 级数.

$$\chi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad (2)$$

另有一级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ 和 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 有相同的收敛区域且 $a_0 = b_0$，则定义

$$\chi_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \qquad (3)$$

令

$$\chi_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - b_n) z^n = z\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - b_n) z^{n-1} \qquad (4)$$

式 (4) 中级数之收敛区域含级数 (2) 的收敛区域. 假设对于一般的弹性力学问题，由级数 (2)—(4)表示的函数可由它们的收敛区域解析开拓到整个 Ω 上，这样(1)便为

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}[\psi(z) + \bar{z}\chi_1(z) + \bar{z}z\chi_2(z)] \quad (5)$$

假设 $f(z)$ 是 Ω 上的解析函数

1. 如果 $\varphi(z) = \mathrm{Re}f(z)$，则令 $\psi(z) = f(z)$，$\chi_1(z) = \chi_2(z) = 0$.

2. 如果 $\varphi(z) = r\mathrm{Re}f(z)$，则令 $\mathrm{Re}[\psi(z)+$

$\bar{z}\chi_1(z)]=x\mathrm{Re}f(z)$，$\phi(0)=0$，所以 $\phi(z)=zg(z)$，$g(z)$ 在 Ω 上解析.

$$\mathrm{Re}[zg(z)+\bar{z}\chi_1(z)]=x\,\mathrm{Re}\,f(z)$$

此方程有解

$$g(z)=\chi_1(z)=\frac{1}{2}f(z)$$

3. 如果 $\varphi(z)=y\,\mathrm{Im}\,f(z)$，相仿于 2，

$$\phi(z)=-\frac{1}{2}zf(z),\quad \chi_1(z)=\frac{1}{2}f(z),$$

$$\chi_2(z)=0$$

4. 如果 $\varphi(z)=(x^2+y^2)\,\mathrm{Re}\,f(z)$，则令 $\chi_2(z)=f(z)$ $\phi(z)=\chi_1(z)=0$.

综上所述，得到下表（即本文的主要结果）

内容 复函数 \ 实值 φ	1. $\mathrm{Re}\,f(z)$	2. $x\mathrm{Re}f(z)$	3. $y\mathrm{Im}f(z)$	4. $(x^2+y^2)\mathrm{Re}f(z)$
$\phi(z)$	$f(z)$	$\frac{1}{2}zf(z)$	$-\frac{1}{2}zf(z)$	0
$\chi_1(z)$	0	$\frac{1}{2}f(z)$	$\frac{1}{2}f(z)$	0
$\chi_2(z)$	0	0	0	$f(z)$

下面引[1]的一个例子说明如何使用此表.

例 1 第 23 栏[1]

$$\varphi=r^2e^{n\theta}\cos(n\ln r)=r^2\mathrm{Re}[e^{-in\ln z}]$$

由表

$$\phi(z)=\chi_1(z)=0\qquad \chi_2(z)=e^{-in\ln z}$$

$$\sigma_r+\sigma_\theta=4\mathrm{Re}[(1-ni)e^{-in\ln z}]$$

$$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta}=-2(n^2+ni)e^{-in\ln z}$$

$$U=\frac{1}{2G}\left[2\frac{1-\nu}{1+\nu}-ni\right]re^{-i\ln z}$$

即

$$\sigma_r=e^{n\theta}[(n^2+2)\cos(n\ln r)-n\sin(n\ln r)]$$

$$\sigma_\theta=-e^{n\theta}[(n^2-2)\cos(n\ln r)+3n\sin(n\ln r)]$$

$$\tau_{r\theta}=ne^{n\theta}[n\sin(n\ln r)-\cos(n\ln r)]$$

$$u=\frac{1}{E}re^{n\theta}[(1+\nu)n\sin(n\ln r)+2(1-\nu)\cos(n\ln r)]$$

$$v=-\frac{1}{E}re^{n\theta}[(1+\nu)n\cos(n\ln r)+4\sin(n\ln r)]$$

以上计算步骤为：1) 把给定的 Airy 应力函数用表化为 Goursat 形式；2) 用现有公式求解各弹性力学分量.

参 考 文 献

[1] 潘立宙，有助于极坐标系中求解平面弹性问题的一份特解表，力学与实践，1，3(1979)，59—70.

（上接第 53 页）

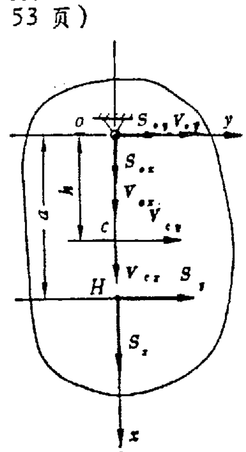

图 1

想推导碰撞中心位置如下：$v_{cx}=\frac{s_x}{m}$

$$v_{cy}=\frac{s_y}{m},\ \omega=\frac{s_y\cdot a}{I_o}$$

由速度合成得 o 点的速度：

$$v_{ox}=v_{cx}=\frac{s_x}{m}\tag{1}$$

$$v_{oy}=v_{cy}-h\cdot\omega=\frac{s_y}{m}-h\cdot\frac{s_y\cdot a}{I_o}\tag{2}$$

若 o 为速度瞬心，则应有：$v_{ox}=v_{oy}=0$

从(1)，(2)式解得

$s_x=0$ 表示碰撞冲量作用方向应垂直 oH.

$ah=\frac{I_o}{m}$ 表示碰撞中心 H 与转轴 o 的位置关系。