S.P.Shen, 1981, J. E.C.E.I
(J. East China Engr. Inst.)
p. 53—59

刚体运动速度与加速度分布的若干特性

沈 善 普

编者按： 本文作者是我院77级学生。这是他二年级时，学完《理论力学》运动学部分后，尝试应用矩阵代数、解析几何和射影几何的基本知识，进一步分析刚体运动学几何特性的文章。我们发表此文，旨在鼓励学习中的独立钻研、勇于探求的精神。

〔摘要〕 本文通过矩阵运算及几何作图[1]描述了运动刚体上速度矢量与加速度矢量分布的若干几何特性。文中包括四个定理、一个推论及两个命题。

定理一 作平面运动的平面形上任一三角形的速度矢端分布在一个与这个三角形相似的三角形上。

证明

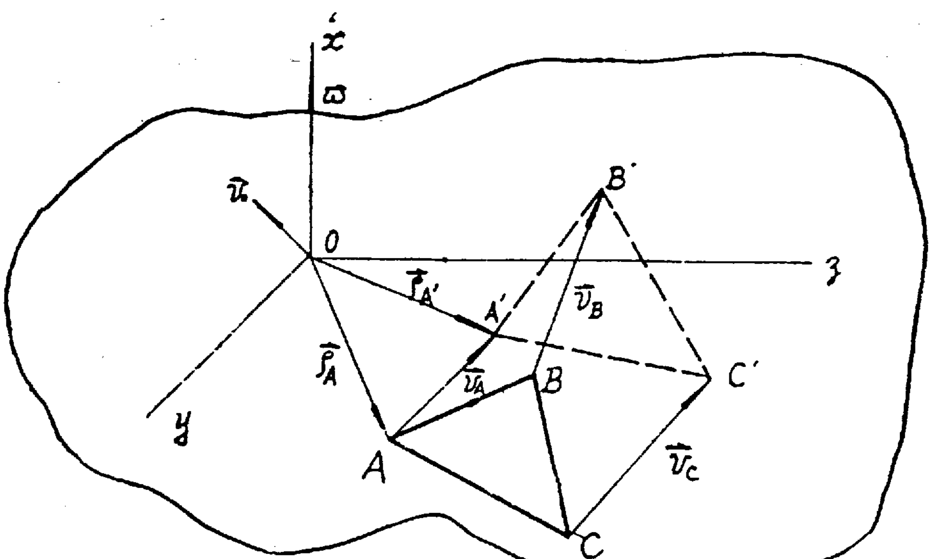

图1 △ABC∽△A′B′C′

设v_0表基点速度，ω 表平面形角速度，$\vec{\rho}$ 表由基点出发的位矢。则$\vec{\rho}$ 点的速度$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{\rho}$，或记成坐标形式

$$v = v_0 + \Omega\rho \tag{1}$$

式中Ω是对应于角速度$\vec{\omega}$的反对称矩阵[2]，其余各量视为列向量。

下面就开始论证$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。从图1，有

$$\rho_{A'} = \rho_A + v_0 + \Omega\rho_A = (\Omega + E)\rho_A + v_0$$

同理 $\rho_{B'} = (\Omega + E)\rho_B + v_0 \qquad \rho_{C'} = (\Omega + E)\rho_C + v_0$

∴ $A'B' = \rho_{B'} - \rho_{A'} = (\Omega + E)(\rho_B - \rho_A) = (\Omega + E)AB$

同理 $B'C' = (\Omega + E)BC \qquad C'A' = (\Omega + E)CA$

我们计算

$$|A'B'| = |(\Omega + E)AB| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega \\ 0 & \omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(1+\omega^2)}\sqrt{(y^2+z^2)}$$

$$= \sqrt{1+\omega^2}\,|AB| = M|AB|$$

式中 y，z分别是AB在y，z两轴上的投影坐标。$M = \sqrt{1+\omega^2}$。

同理 $|B'C'| = M|BC| \qquad |C'A'| = M|CA|$

故
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = M \tag{3}$$

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

推论 作平面运动的平面形上任一多边形的速度矢端分布在一个与这个多边形相似的多边形上。

从公式（3），这个结论几乎是显然的。

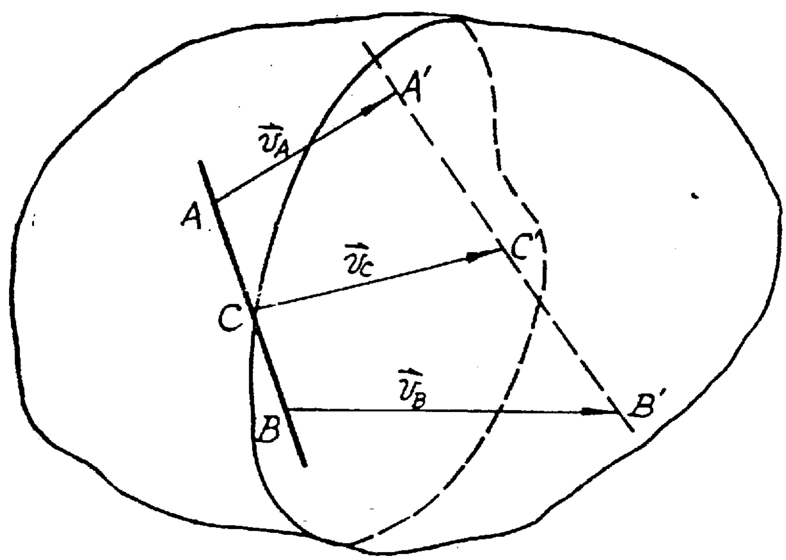

图2 A′、B′、C′三点共线

命题 1　运动刚体上任何两点所决定的直线上各点的速度矢端落在这两点速度矢端所决定的直线上。

证明　设有直线AB，C为其上任意一点，则总存在一实数λ，使得$CB=\lambda AC$

由公式（2）　$A'C'=(\Omega+E)AC$

$$B'C'=(\Omega+E)BC=(\Omega+E)\lambda AC=\lambda A'C'$$

∴　A′、B′、C′三点共线。又由于点C选取的任意性，命题获证。

命题 2　运动刚体上任何两点所决定的直线上各点的加速度矢端落在这两点加速度矢端所决定的直线上。

证明：

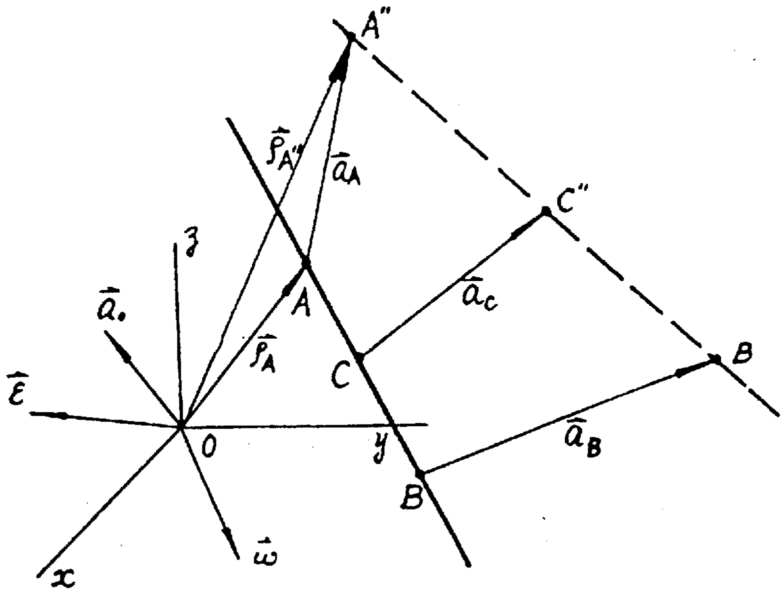

图 3　A″、B″、C″三点共线

设$\vec{a}_0$表基点加速度，$\vec{\varepsilon}$表角加速度。则$\vec{\rho}$点的加速度$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$，或记成坐标形式

$$a=a_0+(\Psi-\omega^2E)\rho-(\omega^T\rho)\omega \tag{5}$$

式中Ψ是角加速度$\vec{\varepsilon}$的反对称矩阵[2]；a，a_0，ω，ρ均视为列向量。从（5）

$$\rho_{A''}=\rho_A+a_0+(\Psi-\omega^2E)\rho_A-(\omega^T\rho_A)\omega$$

$$\rho_{B''}=\rho_B+a_0+(\Psi-\omega^2E)\rho_B-(\omega^T\rho_B)\omega$$

$$\rho_{C''}=\rho_C+a_0+(\Psi-\omega^2E)\rho_C-(\omega^T\rho_C)\omega$$

$$\therefore \quad A''C'' = \rho_{C''} - \rho_{A''} = [\Psi + (1-\omega^2)E](\rho_C - \rho_A) - [\omega^T(\rho_C - \rho_A)]\omega$$
$$= [\Psi + (1-\omega^2)E]AC - (\omega^T AC)\omega$$
$$C''B'' = [\Psi + (1-\omega^2)E]CB - (\omega^T AB)\omega$$
$$= [\Psi + (1-\omega^2)E]\lambda AC - (\omega^T \lambda AC)\omega$$
$$= \lambda A''C''$$

故A″、B″、C″共线。

必须指出，把一个物理量引入几何空间，得同时引进比例尺μ[3]，μ是一个有纲常数，其单位是〔实际物理量单位〕〔图中几何度量单位〕$^{-1}$。为了方便起见，以上关于速度问题的讨论中取了$\mu = 1$〔米〕〔秒〕$^{-1}$〔米〕$^{-1}$；在关于加速度的讨论中取了$\mu = 1$〔米〕〔秒〕$^{-2}$〔米〕$^{-1}$。

定理二　作平面运动的平面形上的代数曲线上各点的速度矢端分布在与原曲线同阶的代数曲线上；而二次曲线的速度矢端分布在与原曲线同型的曲线上。

这里所谓两平面曲线同型指同为椭圆、双曲线等。

证明　前一部分几乎是明显的，因为速度变换是仿射变换，而仿射变换不改变代数曲线的阶。下面就来证定理的后一部分。

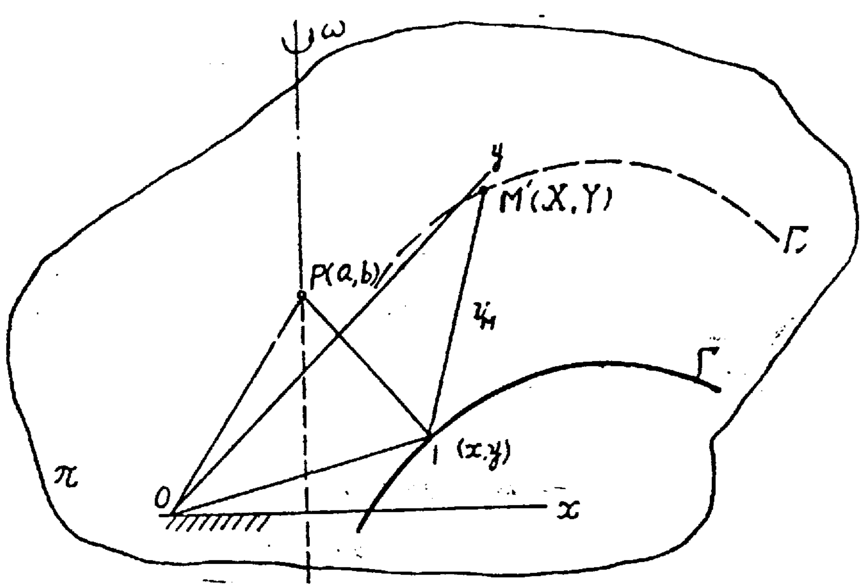

图 4　定理二证明用图

直角坐标系oxy固联于平面形π上，π的速度瞬心为P(a, b)，角速度为ω，Γ为π上的一条二次曲线。Γ上一点M(x, y)的速度矢端M′(X, Y)向矢量，t是参数，l通ρ_0点，其余符号与定理一证明里所用符号相同。

证明　ρ点的速度矢端

$$\rho' = (\Omega + E)\rho + v_0 = (\Omega + E)\rho_0 + v_0 + t(\Omega + E)s \qquad (9)$$

所以l'的方向矢量为 $(\Omega + E)s$ 。由解析几何，l与l'共面的充要条件是

系 1　作平面运动的平面上的二次曲线的加速度矢端分布在与原曲线同型的曲线上。

证明可仿照定理二的证明进行。

系 2　作平面运动的平面形上任一圆周的速度矢端仍分布在一圆周上。

证明　设平面形上有一圆，如此选取坐标系以致该圆方程为

$$x^2+y^2=R^2$$

显见，变换（7—a，b，c）对该圆都有保圆性质。

系 3　作平面运动的平面形上任一圆周的加速度矢端仍分布在一圆周上。

证明可仿照系 2 的证明进行。

定理三　运动刚体上直线l与其速度矢端直线l'共面的充要条件是矩阵$(\Omega\rho_0+v_0\ \ \Omega s\ \ s)$的行列式为零。

这里直线l的方程是　$\rho=\rho_0+ts$，s是方程

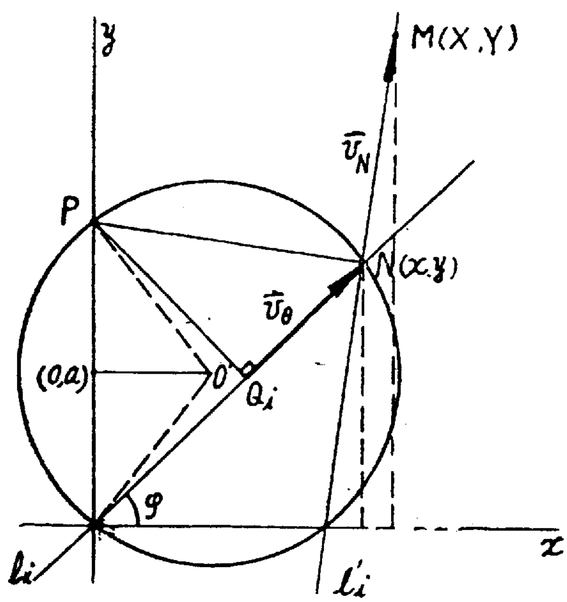

图 6　定理四，ii）的图

$$x=ON\cos\varphi=2a(\sin\varphi+\omega\cos\varphi)\cos\varphi \tag{a}$$

$$y=ON\sin\varphi=2a(\sin\varphi+\omega\cos\varphi)\sin\varphi \tag{b}$$

$(a)^2+(b)^2$：$x^2+y^2=4a^2(\sin^2\varphi+\omega^2\cos^2\varphi+2\omega\sin\varphi\cos\varphi)$

又　$tg\varphi=\dfrac{y}{x}$，上式可化为

$$(x-\omega a)^2+(y-a)^2=(a\sqrt{1+\omega^2})^2 \tag{12}$$

(12) 表明点N分布在一圆周上，这圆周圆心是以OP为底边、高为 $\omega\cdot\frac{OP}{2}$ 的等腰三角形的顶点O′半径为这等腰三角形的一腰长。如图6所示。

iii) 设l_1与l_1'的交点N 的速度矢量为$\vec{v_N}$，其末端为M(X, Y)，图6。那么 $V_{Nx}=\omega(2a-y)$ ，$V_{Ny}=\omega x$

$$\therefore\quad X=x+v_{Nx}=x+\omega(2a-y) \tag{c}$$

$$Y=y+v_{Ny}=y+\omega x \tag{d}$$

联立方程 (12)、(c)、(d)，消去x、y得到变量X、Y间的关系式——M点的轨迹方程

$$[X-2\omega a]^2+[Y-(1+\omega^2)a]^2=[(1+\omega^2)a]^2 \tag{13}$$

M所在的圆如下图。

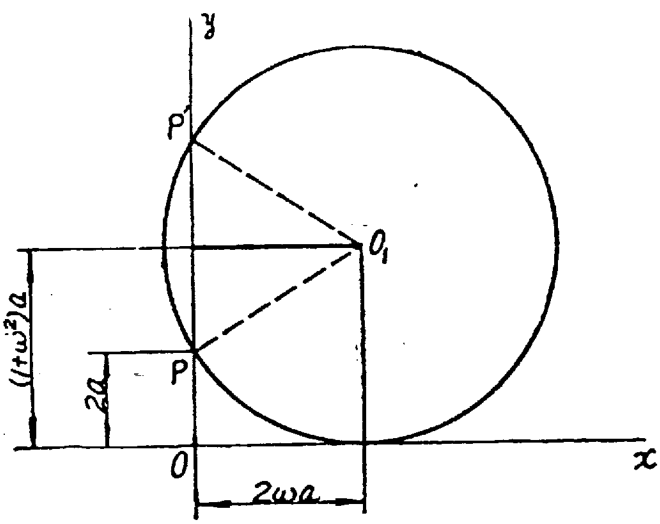

图7　定理四，iii) 的图

作者对刘正福老师的指导表示最深切的感谢。如没有刘老师的提示，作者无法完成分布圆定理，俞占鸿、沈守范老师也给作者不少指导，特此致谢。

参 考 文 献

〔1〕 D.希尔伯特，S.康福森，直观几何，王联芳译．人民教育出版社，1959

〔2〕 郭仲衡，非线性弹性力学，科学出版社，1978.

〔3〕 切特鲁维新，射影几何学（上），东北师范大学几何教研室译，高等教育出版社，1957

〔4〕 Christie, Dan Edwin, Vector mechanics, New York, 1964